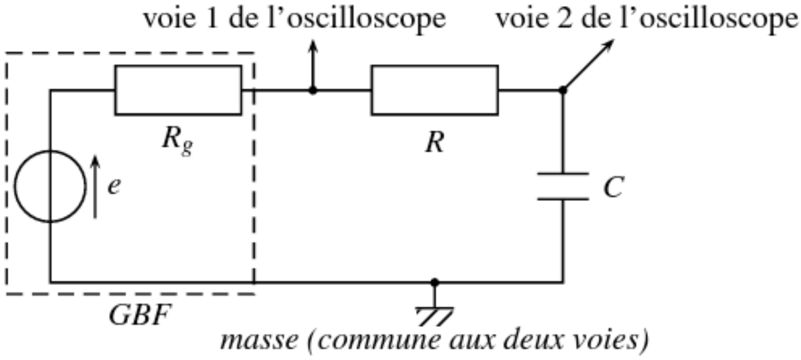
Chapitre 3 : Circuits linéaires du premier ordre

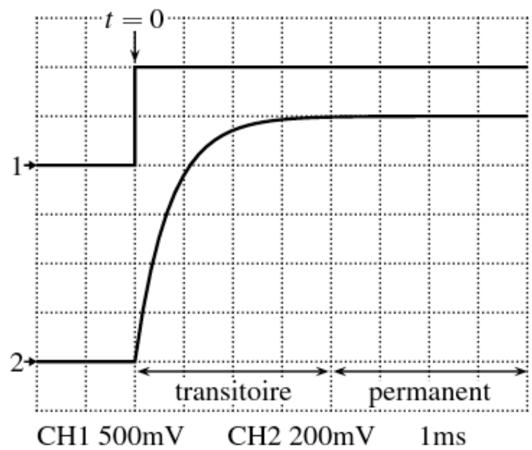
1. Observations expérimentales : réponse indicielle d'un circuit (R,C)

On considère le montage suivant constitué :
- d'un générateur basse fréquence (GBF) : le générateur supposé réel est modélisé comme l'association série d'une source idéale de tension de f.e.m e et de résistance interne R_g.
- d'un condensateur de capacité C initialement déchargé ($C = 100\ nF$)
- d'une résistance R ($R = 10\ k\Omega$)

Les tensions aux bornes du générateur et du condensateur sont visualisées simultanément à l'aide d'un oscilloscope.



A l'instant $t = 0$, la tension à vide $e(t)$ passe brutalement de la valeur nulle à une tension positive (ici $1\ V$). On observe alors la réponse du circuit aux bornes du condensateur ; on parle de réponse indicielle ou réponse à un échelon de tension.



On effectue alors les observations suivantes :
- la tension de sortie du circuit tend vers une tension constante, ici égale à la tension imposée par le GBF
- la sortie du circuit atteint cette valeur avec un retard de trois carreaux ($\Delta t \simeq 3{,}5\ ms$)

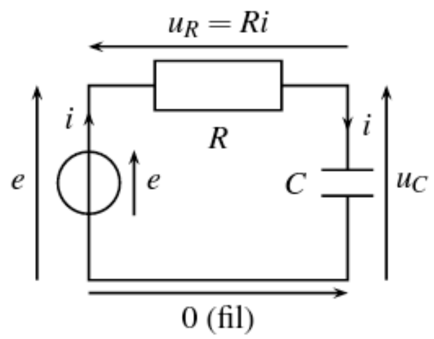
- le régime permanent (ou établi) correspond au cas où la réponse du circuit est de même forme que l'entrée, ici constante
- on appellera régime transitoire la période depuis l'instant initiale précédant le régime permanent.

Nous allons montrer qu'il est possible de retrouver ces résultats par le calcul.

2. Etude théorique de la réponse indicielle d'un circuit (R,C)

2.1. Equation différentielle

On commence déjà par simplifier le montage en le modélisant de la manière suivante :



La résistance totale du circuit (tenant compte de celle du générateur) est donnée par :

$$R_{totale} = R + R_g \simeq R$$

car $R_g \ll R$.

La tension $e(t)$ aux bornes du générateur a pour expression :

$$e(t)\begin{cases} 0 \text{ } si \text{ } t < 0 \\ E_0 \text{ } si \text{ } t > 0 \end{cases}$$

La loi des mailles s'écrit ainsi :

$$e(t) - R \times i(t) - u_c(t) = 0$$

Or, la loi courant-tension pour le condensateur donne :

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt}$$

Soit, pour $t > 0$, on a :

$$\tau\frac{du_C}{dt} + u_C(t) = E_0$$

avec $\tau = RC$.

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. On dit alors du circuit étudié qu'il s'agit d'un circuit linéaire du premier ordre.
Par analyse dimensionnelle, on peut vérifier que τ est homogène à un temps.

$$[\tau] \times \frac{U}{T} + U = U \Rightarrow [\tau] = T$$

τ est appelé constant de temps du circuit.

2.2. Résolution de l'équation différentielle

L'équation obtenue possède un second membre donc la résolution comportera deux étapes :

- résolution de l'équation homogène (sans second membre)
- recherche d'une solution particulière $u_{C,p}(t)$

La solution finale aura alors pour expression :

$$u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t)$$

✓ Résolution de l'équation homogène :

$$\tau \frac{du_{C,h}}{dt} + u_{C,h}(t) = 0$$

D'après le cours de mathématiques, on sait que l'on a une solution de la forme

$$u_{C,h}(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

✓ Recherche d'une solution particulière : on cherchera toujours une solution particulière de même nature que le second membre. Ici, on prend donc :

$$u_{C,p}(t) = B = Cte$$

En injectant $u_{C,p}$ dans l'équation, on obtient :

$$B = E_0$$

Finalement, la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$u_C(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E_0$$

Cette solution est obtenue à une constante près qu'il va falloir déterminer à l'aide des conditions initiales.

2.3. Condition initiale

Pour $t < 0$, on a :

$$e(t) = 0 \ ; \ i(t) = 0$$

On a également :

$$u_C(t) = 0$$

puisque le condensateur est initialement déchargé. On peut ainsi écrire

$$u_C(t = 0^-) = 0$$

où $u_C(t = 0^-)$ est la valeur de $u_C(t)$ pour un instant négatif aussi proche de $t = 0$ que l'on veut.

La question est de savoir ce que vaut $u_C(t = 0^+)$, c'est-à-dire la valeur de $u_C(t)$ pour un instant positif aussi proche de $t = 0$ que l'on veut et pour lequel on aura :

$$e(t) = E_0$$

Nous avons vu au chapitre précédent que l'énergie stockée par le condensateur a pour expression :

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C \times u_C^2$$

L'énergie contenue dans un condensateur et donc la tension à ses bornes est une fonction continue du temps ; elle ne peut varier instantanément.

On aura donc :

$$u_C\left(t=0^-\right)=u_C\left(t=0^+\right)=0$$

où $u_C\left(t=0^-\right)$ est la valeur de $u_C(t)$ pour un instant négatif aussi proche de $t=0$ que l'on veut
Nous écrirons ainsi par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur :

$$u_C(0)=0$$

On obtient ainsi la constante :

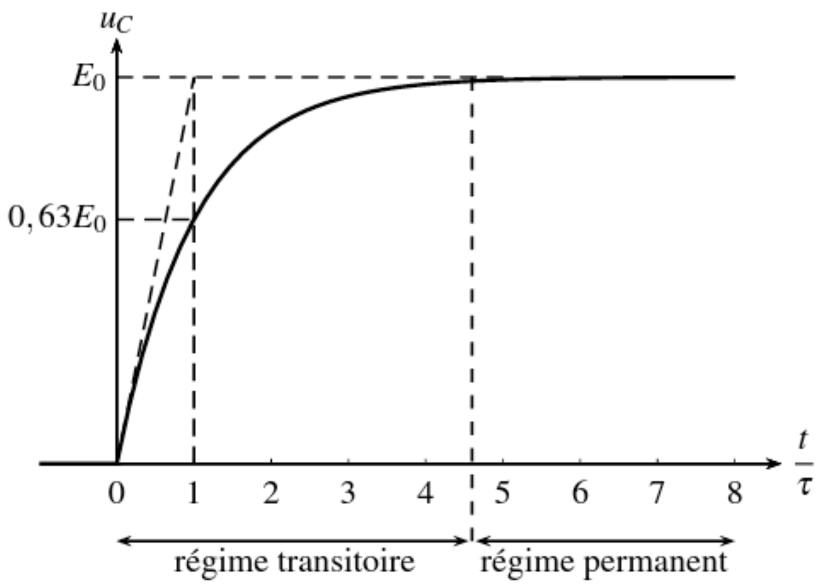
$$u_C(0)=A+E_0 \Leftrightarrow A=-E_0$$

La solution finale s'écrit donc :

$$u_C(t)=E_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

2.4. Représentation graphique

Le tracé de la fonction $u_C(t)$ est en accord avec les résultats expérimentaux obtenus au paragraphe précédent.



On peut alors effectuer les remarques suivantes :

- la tension aux bornes du condensateur tend vers une valeur finale constante égale à E_0. La courbe admet par conséquent une asymptote horizontale.
- la fin du régime transitoire peut être définie comme l'instant t_0 où le système atteint sa valeur finale à 1% près. On a alors :

$$u_C(t_0)=E_0\left(1-e^{-\frac{t_0}{\tau}}\right)=0,99\times E_0$$

soit

$$0{,}01 = e^{-\frac{t_0}{\tau}}$$

Finalement, on trouve :

$$t_0 = 4{,}6\tau$$

Remarque : il arrive que l'on considère la fin du régime transitoire pour une valeur finale atteinte à 5% près ; dans ce cas, on a

$$t_0 = 3\tau$$

- la tangente à l'origine de la courbe représentative de $u_C(t)$ a pour équation :

$$u_C(t) = \left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} \times t = \frac{E_0}{\tau} \times t$$

Elle coupe donc l'asymptote pour $t = \tau$.

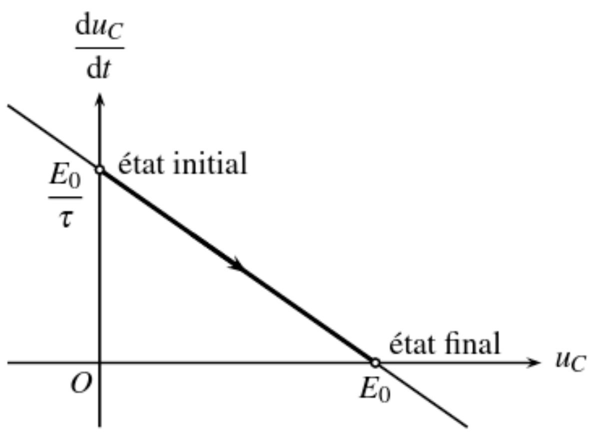
2.5. Portrait de phase

On appelle portrait de phase la représentation graphique avec :
- la réponse $s(t)$ du circuit en abscisse
- la dérivée de la réponse $\frac{ds}{dt}$ en ordonnée

Dans le cas du circuit (R,C) étudié ici, on a une équation affine :

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{E_0}{\tau} - \frac{u_C}{\tau}$$

Il s'agit par conséquent d'une droite.



Les états initial et final sont donnés par $u_C(0) = 0$ et $\lim_{t\to\infty}(u_C(t)) = E_0$. La droite est donc parcourue de gauche à droite.

L'utilité du portrait de phase est de permettre de prévoir l'évolution du système avant toute résolution de l'équation différentielle. Toutefois, il est à noter que :
- il sera nécessaire d'identifier les états initial et final sur le portait de phase et donc connaître les valeur initiale et finale de la réponse
- le facteur temps étant éliminé du portrait de phase, il n'est pas possible de savoir en combien de temps le système passera de l'état initial à l'état final.

2.6. Bilan énergétique

On peut écrire pour le circuit :

$$u_C(t) = E_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} = C\frac{E_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Il s'ensuit qu'on peut exprimer les énergies associées aux différents éléments du circuit :

- énergie délivrée par le générateur

$$\begin{aligned} E_{générateur} &= \int_{t=0}^{\infty} e(t)\times i(t)\,dt \\ &= E_0\int_{t=0}^{\infty}\frac{E_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt \\ &= \frac{E_0^2}{R}\left[(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{\infty} \\ &= CE_0^2 \end{aligned}$$

- énergie stockée dans le condensateur

$$E_{condensateur} = \frac{1}{2}C\left[\lim_{t\to\infty}(u_C)\right]^2 = \frac{1}{2}CE_0^2$$

- énergie dissipée par effet Joule dans la résistance

$$\begin{aligned} E_{résistance} &= \int_{t=0}^{\infty} R\times\left[i(t)\right]^2\,dt \\ &= R\int_{t=0}^{\infty}\frac{E_0^2}{R^2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\,dt \\ &= \frac{E_0^2}{R}\left[\left(-\frac{\tau}{2}\right)e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2}CE_0^2 \end{aligned}$$

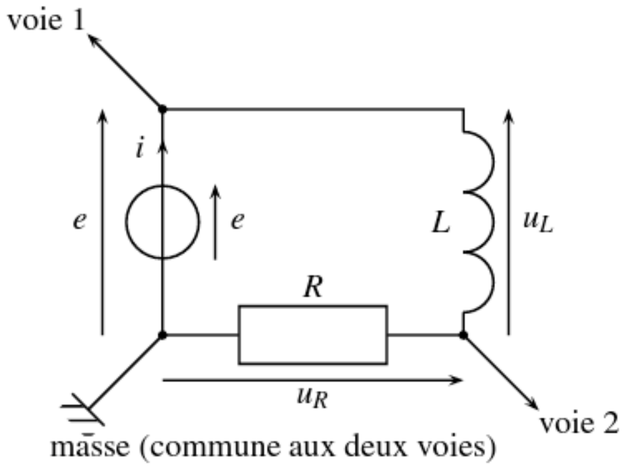
On retrouve bien le bilan :

$$E_{générateur} = E_{résistance} + E_{condensateur}$$

3. Etude théorique de la réponse indicielle d'un circuit (R,L)

3.1. Préambule

Le schéma du montage est le suivant :



Tout comme pour le circuit précédent, on suppose que l'on a :

$$R_{totale} = R + R_g \simeq R$$

car $R_g \ll R$.

La tension $e(t)$ aux bornes du générateur a pour expression :

$$e(t)\begin{cases} 0 \ si \ t < 0 \\ E_0 \ si \ t > 0 \end{cases}$$

Pour un tel circuit, on considère que la réponse correspond à l'intensité du courant dans la maille. Celle-ci étant à un facteur multiplicatif près égale à la tension aux bornes de la résistance, on peut visualiser son évolution à l'oscilloscope.

Remarque : un oscilloscope ne peut être utilisé que pour visualiser des tensions.

3.2. Équation différentielle

La loi des mailles s'écrit ainsi :

$$e(t) - R \times i(t) - u_L(t) = 0$$

Or, la loi courant-tension pour la bobine donne :

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}$$

Soit, pour $t > 0$, on a :

$$\tau\frac{di}{dt} + i(t) = \frac{E_0}{R}$$

avec $\tau = \dfrac{L}{R}$.

Par analyse dimensionnelle, on peut vérifier que τ est homogène à un temps.

$$[\tau] \times \frac{I}{T} + I = I \Rightarrow [\tau] = T$$

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants de forme analogue à celle du paragraphe précédent. Ainsi, la solution de l'équation différentielle s'écrit :

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E_0}{R}$$

Cette solution est obtenue à une constante près qu'il va falloir déterminer à l'aide des conditions initiales.

3.3. Condition initiale

Pour $t < 0$, on a :

$$e(t) = 0 \; ; \; i(t) = 0$$

La question est de savoir ce que vaut $i(t = 0^+)$, c'est-à-dire la valeur de $i(t)$ pour un instant positif aussi proche de $t = 0$ que l'on veut et pour lequel on aura :

$$e(t) = E_0$$

Nous avons vu au chapitre précédent que l'énergie stockée par la bobine a pour expression :

$$E_L(t) = \frac{1}{2} L \times i^2$$

L'énergie contenue dans une bobine et donc l'intensité du courant qui la traverse est une fonction continue du temps ; elle ne peut varier instantanément.

On aura donc :

$$i(t = 0^-) = i(t = 0^+) = 0$$

où $i(t = 0^-)$ est la valeur de $i(t)$ pour un instant négatif aussi proche de $t = 0$ que l'on veut

Nous écrirons ainsi

$$i(0) = 0$$

On obtient ainsi la constante :

$$i(0) = A + \frac{E_0}{R} \Leftrightarrow A = -\frac{E_0}{R}$$

La solution finale s'écrit donc :

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

2.6. Bilan énergétique

On peut exprimer les énergies associées aux différents éléments du circuit :

- énergie stockée dans la bobine

$$E_{bobine} = \frac{1}{2} L \left[\lim_{t \to \infty}(i)\right]^2 = \frac{1}{2}\frac{LE_0^2}{R^2} = \frac{1}{2}\frac{\tau E_0^2}{R}$$

- énergie délivrée par le générateur

$$\begin{aligned} E_{générateur} &= \int_{t=0}^{\infty} e(t)\times i(t)\,dt \\ &= E_0 \int_{t=0}^{\infty} \frac{E_0}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)dt \\ &= \frac{E_0^2}{R}\left[t-(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

Pour obtenir une expression de cette énergie, on convient de considérer que l'expérience a une durée limitée Δt telle que le régime permanent puisse être établi, soit :

$$\Delta t \gg \tau$$

On a alors :

$$E_{générateur} = \frac{E_0^2}{R}\left[t-(-\tau)e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_0^{\Delta t} \simeq \frac{E_0^2}{R}\times(\Delta t-\tau)$$

- énergie dissipée par effet Joule dans la résistance

$$\begin{aligned} E_{résistance} &= \int_{t=0}^{\infty} R\times\left[i(t)\right]^2 dt \\ &= R\int_{t=0}^{\infty} \frac{E_0^2}{R^2}\left(1-2e^{-\frac{t}{\tau}}+e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)dt \\ &= \frac{E_0^2}{R}\left[t+2\tau e^{-\frac{t}{\tau}}+\left(-\frac{\tau}{2}\right)e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

On doit procéder comme l'énergie du générateur soit :

$$E_{résistance} = \frac{E_0^2}{R}\left[t+2\tau e^{-\frac{t}{\tau}}+\left(-\frac{\tau}{2}\right)e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_0^{\Delta t} \simeq \frac{E_0^2}{R}\left(\Delta t-\frac{3\tau}{2}\right)$$

On retrouve bien le bilan :

$$E_{générateur} = E_{résistance} + E_{bobine}$$

4. Généralisation

Tout circuit du premier ordre ayant pour réponse la grandeur $s(t)$ obéit à un équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant pouvant être mise sous la forme :

$$\tau\frac{ds}{dt}+s(t)=s_\infty$$

où :
- τ est la constante de temps du circuit
- $s_\infty = \lim_{t\to\infty}(s(t))$ la valeur en régime permanent

Au programme ne figurent que deux types de réponses d'un circuit du premier ordre :
- réponse indicielle pour laquelle s_∞ aura une valeur constante imposée par un générateur
- régime libre pour lequel $s_\infty = 0$; dans ce cas, le circuit ne comporte aucun générateur

Compte tenu des expressions des énergies stockées par une bobine et un condensateur

$$E_L(t)=\frac{1}{2}L\times i^2 \text{ et } E_C(t)=\frac{1}{2}C\times u_C^2$$

et des lois courant-tension

$$u_L(t)=L\frac{di}{dt} \text{ et } i(t)=C\frac{du_C}{dt}$$

nous pouvons déduire que :

- l'intensité du courant qui traverse une bobine est une fonction continue du temps
- la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps
- un condensateur déchargé est équivalent à un interrupteur fermé $(u_C=0)$ tandis qu'un condensateur chargé équivaut à un interrupteur ouvert $(i=0)$
- une bobine traversée par un courant d'intensité constante est équivalente à un interrupteur fermé $(u_L=0)$ tandis qu'une bobine qui n'est traversée par aucun courant équivaut à un interrupteur ouvert $(i=0)$

Il est ainsi possible de déduire les valeurs des différentes grandeurs du circuit à l'instant initial et en régime établi en raisonnant sur des schémas équivalents.